XXIII SIMPOZIJUM ZA OPERACIONA ISTRAŽIVANJA
Zlatibor, 1-5. oktobra 1996.

SYM
OP
IS
'96

Klasifikacija λ_0 izraza relacijom denotacije
Classification λ_0 terms with denotation relation

mr Slobodan Radojević, mr Jozef Kratica, Milan Vugdelija[1]
Vladimir Filipović[2]
MAŠINSKI FAKULTET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

Abstrakt: *Uvođenjem λ_0 (lamda objektnog) izraza, kao proširenja λ računa, i koristeći se izmenjenim teoremama Church-Rosser I i Church-Rosser II moguće je definisati relaciju denotacije. Relacija denotacije ili vrednosna relacija, za koju se pokazuje da je relacija ekvivalencije, sve λ_0 izraze klasifikuje u dve klase, klasu terminalnih i neterminalnih izraza. Terminalni izrazi imaju vrednost, što znači da konačnom primenom konverzionih pravila na početni izraz dobijamo izraz u normalnom obliku. Neterminalni izrazi povećavaju svoju složenost primenom bilo kog konverzionig pravila.*

KLJUČNE REČI:
LAMBDA, RAČUN, OBJEKTNI, RELACIJA, EKVIVALENCIJA, KLASE, KLASIFIKACIJA

Abstract: *Using λ_0 calculus and transformed Church-Rosser I and Church-Rosser II theorems we can define denotation relation. This RST relation separate set of all λ_0 terms in two classes. First subset is class of terminal terms. Second subset is class of unterminal terms. With this separation method we can transform terms in simple normal terms.*

KEY WORD:
LAMBDA, CALCULUS, OBJECT, RELATION, RST, CLASS, CLASSIFICATION.

1. UVOD

Poredenjem različitih koncepcija programiranja, moguće je unaprediti neke osobine programskih jezika. Analiza sličnosti i razlika između objekta i funkcije data u [2], podstakla je povezivanje objektno orijentisanog i logičkog programiranja [3].

Kao posledica ovog povezivanja definisan je objektni λ_0 račun [3], [4], sa svim posledicama u opisnim mogućnostima u odnosu na klasični λ račun. Sve ove posledice su opisane i neformalno postavljene u radu [5].

U ovom radu definiše se i opisuje jedna od prikazanih posledica. Posmatrajući relaciju transformacije λ_0 izraza u [3] i [4], možemo uvesti opštiju relaciju ekvivalencije koju nazivamo *relacijom denotacije*. Razlika je u tome što se relacija transformacije definiše nad terminalnim λ_0 izrazima, a relacija denotacije nad terminalnim i neterminalnim λ_0 izrazima. To znači da je moguće pokazati opštost relacije denotacije u odnosu na relaciju transformacije.

[1] Adresa: Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu
27. marta 80 (kabinet 441)
11000 Beograd, Jugoslavija
☎ +381(0)11/3228651 (333)

[2] Adresa: Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
Studentski trg 16
11000 Beograd, Jugoslavija

Rad je nastao u okviru projekta 12M12/8.

Relacija transformacije deli λ_o izraze na izračunljive i neizračunljive, pri čemu se ne posmatra semantička ispravnost izraza, jer se podrazumeva da su oni semantički ispravni. Relacija denotacije odgovarajućim konverzionim pravilima izraze pojednostavljuje ili usložnjava. Ako se posle konačnog broja primena konverzionih pravila faktora izraz svodi na terminalni izraz u normalnom obliku onda je on i semantički ispravan i izračunljiv, inače je semantički neispravan i neizračunljiv.

2. OSNOVNI POJMOVI λ_o RAČUNA

Svaki λ_o izraz se može transformisati odgovarajućim konverzionim pravilima. Ta pravila se mogu iskazati na na sledeći način [1]:

α_o : ako nema slobodnih objekata *y* u *x* tada

$$\lambda_o x.X \quad \circ_{\alpha_o} \quad \lambda_o y.[y/x]X$$

β_o :

$$(\lambda_o x.M)N \quad \circ_{\beta_o} \quad [N/x]M$$

η_o : ako nema slobodnih objekata *x* u *M* tada

$$(\lambda_o x.Mx) \quad \circ_{\eta_o} \quad M$$

Ukoliko λ_o izraz ima delove na koje se mogu primeniti β_o i η_o konverziona pravila onda kažemo da odgovarajući izraz ima *readekse*[3] [1][3].

Definicija 2.1.

λ_o izraz bez radeksa nazivamo *normalni izraz.*

U nastavku rada koristićemo obe Church-Rosser teoreme. Prva teorema uvodi postojanje zajedničkog redukcionig izraza, na koji se mogu svesti obe strane redukcionih pravila. Druga teorema potvrđuje postojanje jedinstvenog redukcionog puta u dobijanju vrednosti izraza, gde za vrednost λ_o izraza smatramo njegov normalni oblik.

Ovi uvedeni pojmovi su nam neohodni za definisanje relacije denotacije, i dokazivanje njenih ekvivalencijskih osobina.

3. RELACIJA DENOTACIJE

Konverziona pravila mogu proširivati ili smanjivati odgovarajući λ_o izraz, pri tome se to može raditi na više načina. Zato se mora definisati jedna relacija kojom se dva redukciona niza mogu poistovetiti.

Definicija 3.1.

Dva λ_o izraza *a* i *b* sa radeksima su *red ekvivalentni* ako i samo ako se *b* dobija primenom β_o i η_o konverzinog pravila na *a*.

Navedena definicija može se zapisati i na sledeći način:

$$a \bullet b \Leftrightarrow a \circ a_1 \wedge a_1 \circ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \circ b$$

gde je sa $\circ$ označeno jedno od β_o i η_o konverzionih pravila, a sa $\bullet$ označena sama relacija red ekvivalentni.

Relacija red ekvivalentni poistovećuje dva izraza ako je jedan deo redukcionog niza drugog ili obrnuto, što zavisi od toga da li konverziona pravila pojednostavljuju ili proširuju izraz.

Na osnovu definicije 3.1. pokažimo sledeće posledice:

Posledica 3.1.

$$a \bullet b \wedge b \circ c \Leftrightarrow a \bullet c$$

Dokaz:

Direktnom primenom definicije 3.1. imamo:

3 Izraz *radeks* nastao je od *"reducible expression"*

$$a \bullet b \wedge b \circ c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \circ a_1 \wedge a_1 \circ a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \circ b \wedge b \circ c$$
$$\Leftrightarrow a \bullet c$$

Posledica 3.2.

$$a \circ b \wedge b \bullet c \Leftrightarrow a \bullet c$$

Dokaz:

Direktnom primenom definicije 3.1. imamo:

$$a \circ b \wedge b \bullet c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \circ b \wedge b \circ b_1 \wedge b_1 \circ b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \circ c$$
$$\Leftrightarrow a \bullet c$$

Posledica 3.3.

$$a \bullet b \Leftrightarrow b \bullet a$$

Dokaz:

Dokaz teče indukcijom po broju primena konverzionih pravila.

Induktivna osnova:

Neka je b dobijen primenom jednog konverzionog pravila tada je prema [5]:

$$a \bullet_1 b \Leftrightarrow a \circ b \Leftrightarrow b \circ a \Leftrightarrow b \bullet_1 a$$

Induktivna hipoteza:

Neka je b dobijen primenom n konverzionih pravila:

$$a \bullet_n b \Leftrightarrow b \bullet_n a$$

Induktivni korak:

$$a \bullet_{n+1} b \Leftrightarrow a \bullet_n a_n \wedge a_n \circ b$$
$$\Leftrightarrow a_n \circ b \wedge a \bullet_n a_n$$
$$\Leftrightarrow b \circ a_n \wedge a \bullet_n a_n$$
$$\Leftrightarrow b \circ a_n \wedge a_n \bullet_n a$$
$$\Leftrightarrow b \bullet_{n+1} a$$

U induktivnom koraku se koriste prethodne posledice i komutativnost disjunkcije.

Posledica 3.4.

$$a \bullet b \wedge b \bullet c \Leftrightarrow a \bullet c$$

Dokaz:

Dokaz teče indukcijom po broju primena konverzionih pravila u $b \bullet c$.

Induktivna osnova:

Neka je c dobijen primenom jednog konverzionog pravila:

$$a \bullet b \wedge b \bullet_1 c \Leftrightarrow a \bullet b \wedge b \circ c \Leftrightarrow a \bullet c$$

Što je tačno na osnovu posledice 3.1.

Induktivna hipoteza:

Neka je c dobijen primenom n konverzionih pravila:

$$a \bullet b \wedge b \bullet_n c \Leftrightarrow a \bullet c$$

Induktivni korak:

$$a \bullet b \wedge b \bullet_{n+1} c \Leftrightarrow a \bullet b \wedge b \bullet_n c_1 \wedge c_1 \circ c$$
$$\Leftrightarrow a \bullet c_1 \wedge c_1 \circ c$$
$$\Leftrightarrow a \bullet c$$

Navedene posledice i definicije su osnova na kojoj se dokazuju RST osobine relacije denotacije, koja se definiše na sledeći način:

Definicija 3.2.

Dva λ_o izraza a i b su u relaciji denotacije $*$ ako i samo ako su u relaciji red ekvivalencije $\bullet$.

Teorema 3.1.

Relacija denotacije $*$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz:

Teoremu 3.1. možemo iskazati i na sledeći način:

$$(\forall a, b \in \lambda_o)\ a * b \Leftrightarrow a \bullet b$$

Na osnovu definicije 3.1. tačno je da je svaki λ_o izraz u relaciji • sam sa sobom, pa je relacija * *refleksivna*:

$$(\forall a \in \lambda_o)\ a*a \Leftrightarrow a \bullet a$$

Kako je:

$$\begin{aligned}(\forall a,b \in \lambda_o)\ a*b &\Leftrightarrow a \bullet b\\ &\Leftrightarrow b \bullet a\\ &\Leftrightarrow b*a\end{aligned}$$

relacija je i *simetrična*.

$$\begin{aligned}(\forall a,b,c \in \lambda_o)\ a*b \wedge b*c &\Leftrightarrow a \bullet b \wedge b \bullet c\\ &\Leftrightarrow a \bullet c\\ &\Leftrightarrow a*c\end{aligned}$$

Što je tačno na osnovu posledice 3.4., pa je relacija * *tranzitivna*, odakle je prema prethodnom i relacija ekvivalencije.

4. ZAKLJUČAK

Relacija denotacije sve λ_o izraze deli na terminalne i neterminalne. Terminalni izrazi imaju vrednost - izraz u normalnom obliku, dok neterminalni povećavaju svoju složenost. Relacija denotacije na taj način u istu klasu stavlja sve objekte sa metodima koji se mogu na njih primeniti, pri tome klasni nivo tih objekata je nevažan. Posmatra se samo terminalno stanje promenjenog objekta posle prijema odgovarajućeg metoda.

Opštost relacije denotacije u odnosu na relaciju transformacije proizilazi iz same definisanosti relacije denotacije.

Relacija denotacije je deo relacije tipa kojom se objekti klasifikuju i prema klasi od koje nastaju u okviru izračunljivosti.

5. LITERATURA

[1] Barendregt, H., P.
The Lambda Calculus
MIR, MOSKVA, 1985.

[2] Bobrow, G., D., Kahn, K., Kiczales, G., Masinter, L., Stefik, M., Zdybel, F.
CommonLoops Merging Lisp and Object-Oriented Programming,
ACM 1986.

[3] Radojević, S.
Uporedna analiza objektno orijentisanog i logičkog programiranja,
Magistarski rad, Matematički fakultet u Beogradu, 1991.

[4] Radojević, S., Kratica, J.
Klasifikacija λ_o izraza relacijom transfomracije
XXII YU SYM-OP-IS, (183-187), 1995.

[5] Wegner, P.
Concepts and Paradigms of Object_oriented Programming,
ACM, OOPSLA/ECOOP 90, 1990.